مدرسة راهبات المخلص الناصرة | בית ספר נזירות המושיע נצרת | SALVATORIAN SISTERS' SCHOOL NAZARETH
الناصرة ١٦١٠١ ص.ب. P.O.BOX 121 ☎ 04/6554674 🖷 04/6084337 נצרת 16101 NAZARETH
E.mail: school@sds-holyland.org www.sds-holyland.org

اسم الطالب: _____ الصف: _____ التاريخ: _____

ورقة عمل: الدالّة التربيعيّة وقانون الجذور

الصف التاسع – 5 وحدات

تذكير

- في الدالّة $y = ax^2$: إذا كان $a > 0$ فالقطع المكافئ قائم ونقطة رأسه صغرى، وإذا كان $a < 0$ فهو مقلوب ونقطة رأسه عظمى.
- إزاحة عموديّة $y = ax^2 + k$: الرأس $(0, k)$. إزاحة أفقيّة $y = a(x - p)^2$: الرأس $(p, 0)$.
- $y = a(x - p)^2 + k$: نقطة الرأس (p, k)، ومعادلة محور التماثل $x = p$.
- في صورة الضرب $y = a(x - x_1)(x - x_2)$: النقطتان الصفريّتان هما x_1 وx_2، ومحور التماثل في منتصفهما.
- في الصورة العامّة $y = ax^2 + bx + c$: الإحداثيّ x لنقطة الرأس (إلى اليسار)، وقانون الجذور لحلّ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (إلى اليمين):

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الجزء الأوّل: الرسم البيانيّ وخواصّ الدالّة

1. ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة.

أ. نقطة رأس القطع المكافئ $y = -(x + 3)^2 + 2$ هي:

1) $(3, 2)$ صغرى **2)** $(-3, 2)$ عظمى **3)** $(-3, -2)$ عظمى **4)** $(3, -2)$ صغرى

ب. أيّ دالّة من الدوالّ الآتية ليس لها نقاط صفريّة؟

1) $y = (x - 2)^2$ **2)** $y = -x^2 + 4$

3) $y = 2(x + 1)^2 + 3$ **4)** $y = -(x - 1)^2 + 1$

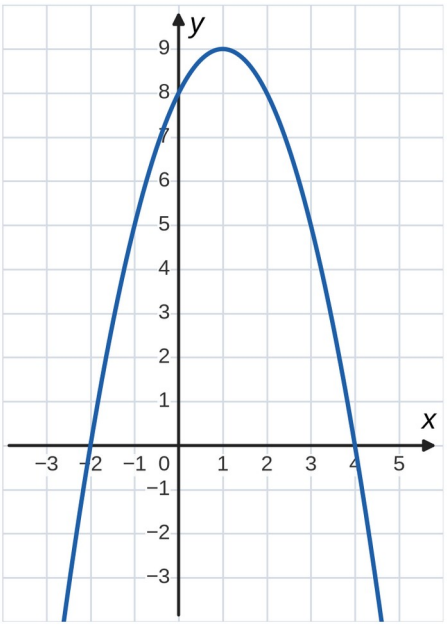
ج. انعكاس الرسم البيانيّ للدالّة $y = (x - 1)^2 - 4$ بالنسبة إلى المحور x هو الرسم البيانيّ للدالّة:

1) $y = (x + 1)^2 + 4$ **2)** $y = -(x - 1)^2 + 4$

3) $y = -(x + 1)^2 - 4$ **4)** $y = (x - 1)^2 + 4$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

2. أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $y = a(x - p)^2 + k$.



أ. سجّل إحداثيّات نقطة الرأس ونوعها.

ب. سجّل النقاط الصفريّة، ونقطة التقاطع مع المحور y.

ج. سجّل المجال التصاعديّ والمجال التنازليّ.

د. سجّل المجال الموجب والمجال السالب.

هـ. معطى أنّ $a = -1$. اكتب الدالّة.

$y =$ _____

و. اكتب الدالّة التي رسمها البيانيّ هو انعكاس هذا الرسم بالنسبة إلى المحور x، ثمّ سجّل نقطة رأسها ونوعها ومجالها الموجب.

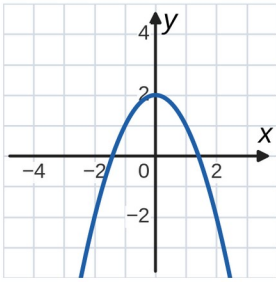
© المعلّمة كرستين عيد برانسي

3. أمامك أربع دوالّ تربيعيّة وأربعة رسوم بيانيّة:

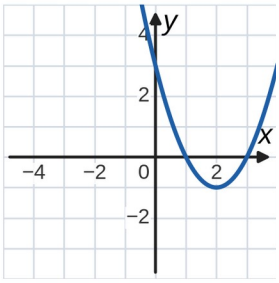
أ) $y = (x - 2)^2 - 1$ **ب)** $y = -(x + 1)^2 + 4$

ج) $y = -x^2 + 2$ **د)** $y = (x + 3)^2$

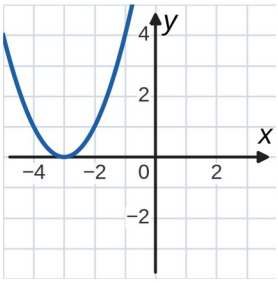
1)



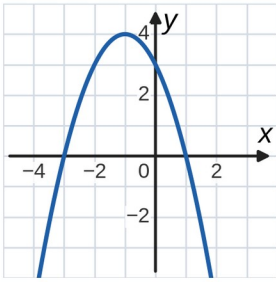
2)



3)



4)



أ. لائم كلّ دالّة بالرسم البيانيّ المناسب لها، وسجّل إحداثيّات نقطة الرأس ونوعها.

الدالّة	أ	ب	ج	د
رقم الرسم البيانيّ				
نقطة الرأس				
نوعها				

ب. أيّ دالّة من الدوالّ الأربع تصاعديّة لكلّ قيم $x > 0$؟ علّل.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

4. الإزاحات:

أ. أزحنا الرسم البيانيّ للدالّة $y = 2x^2$ ثلاث وحدات إلى الأعلى. اكتب الدالّة الجديدة ونقطة رأسها.

ب. أزحنا الرسم البيانيّ للدالّة $y = 2x^2$ أربع وحدات إلى اليمين. اكتب الدالّة الجديدة ونقطة رأسها.

ج. أزحنا الرسم البيانيّ للدالّة $y = 2x^2$ خمس وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل. اكتب الدالّة الجديدة ونقطة رأسها.

د. نقطة رأس القطع المكافئ $y = a(x - p)^2 + k$ هي $(-2, 5)$، ويمرّ القطع بالنقطة $(0, 1)$. جد a، وحدّد نوع نقطة الرأس.

a = _____

هـ. معطاة الدالّة $y = -(x - 3)^2 + k$. لأيّ قيم k يكون للدالّة نقطتان صفريّتان؟ نقطة صفريّة واحدة؟ ولا نقطة صفريّة؟ علّل.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

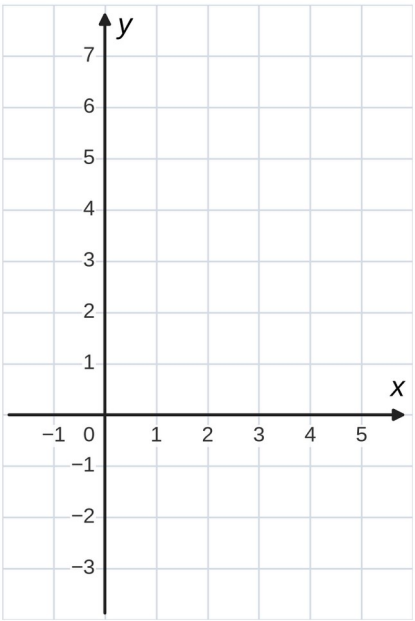
الجزء الثاني: صورة الضرب والصورة العامّة

5. أكمل الجدول.

	$y = (x - 1)(x - 7)$	$y = -2(x + 4)(x - 2)$
النقاط الصفريّة		
معادلة محور التماثل		
نقطة الرأس ونوعها		
نقطة التقاطع مع المحور y		
المجال التصاعديّ		
المجال التنازليّ		
المجال الموجب		
المجال السالب		

6. معطاة الدالّة $y = 2x^2 - 8x + 6$.

أ. جد إحداثيّات نقطة الرأس، وحدّد نوعها.



ب. جد النقاط الصفريّة بواسطة قانون الجذور.

ج. جد نقطة التقاطع مع المحور y.

د. ارسم رسمًا تقريبيًّا للدالّة في هيئة المحاور المجاورة.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الثالث: حلّ المعادلات التربيعيّة

7. حلّ المعادلات الآتية بواسطة قانون الجذور. في البند و، قرّب الحلّين إلى منزلتين عشريّتين.

أ) $x^2 - 5x - 14 = 0$ **ب)** $2x^2 + 3x - 2 = 0$ **ج)** $3x^2 - 7x + 2 = 0$

د) $x^2 - 6x + 9 = 0$ **هـ)** $x^2 + 2x + 5 = 0$ **و)** $x^2 - 2x - 4 = 0$

8. حلّ كلّ معادلة بالطريقة الأنسب لها (تحليل، جذر تربيعيّ، إخراج عامل مشترك، أو قانون الجذور)، واكتب الطريقة التي اخترتها.

أ) $(x - 3)(2x + 5) = 0$ **ب)** $(x + 2)^2 = 49$ **ج)** $3x^2 - 12x = 0$

د) $5x^2 - 45 = 0$ **هـ)** $2x^2 - x - 6 = 0$ **و)** $x(x + 4) = 2x + 15$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

9. تطبيقات:

أ. طول مستطيل أكبر من عرضه بـ 3 سم، ومساحته 40 سم^2. جد طول المستطيل وعرضه.

العرض: _____ الطول: _____

ب. قُذفت كرة إلى الأعلى. ارتفاع الكرة (بالأمتار) بعد t ثانية يُعطى بالدالّة:

$h = -5t^2 + 20t + 25$

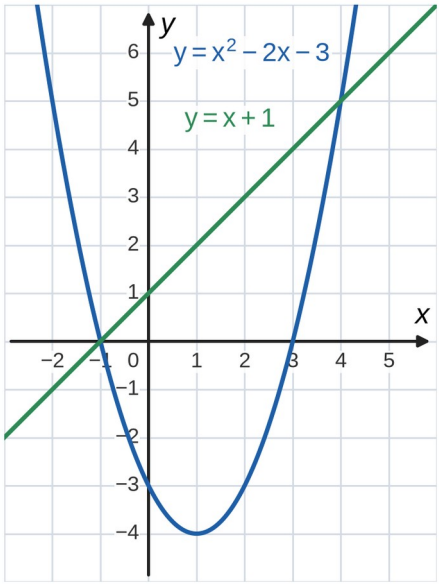
(1) بعد كم ثانية تصل الكرة إلى الأرض؟

(2) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة، وبعد كم ثانية؟

(3) متى يكون ارتفاع الكرة 40 مترًا؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الرابع: تقاطع قطع مكافئ مع مستقيم ومع قطع مكافئ

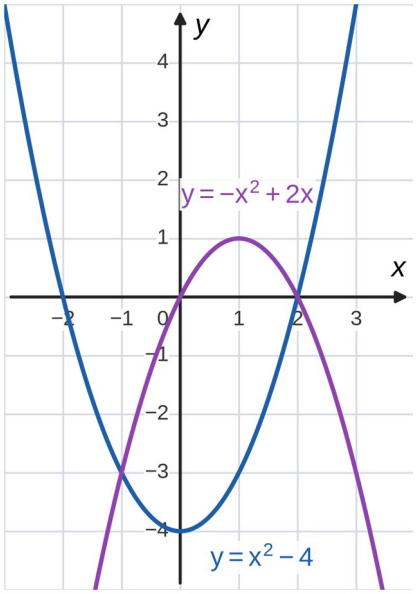


10. في هيئة المحاور المجاورة رُسم القطع المكافئ $y = x^2 - 2x - 3$ والمستقيم $y = x + 1$.

أ. جد نقطتي التقاطع بين القطع المكافئ والمستقيم بطريقة جبريّة.

ب. تحقّق من إجابتك بواسطة الرسم البيانيّ.

ج. لأيّ قيمة k يقطع المستقيم $y = k$ القطع المكافئ في نقطة واحدة فقط؟ علّل.



11. في هيئة المحاور المجاورة رُسم القطعان المكافئان $y = x^2 - 4$ و$y = -x^2 + 2x$.

أ. جد نقاط التقاطع بين القطعين المكافئين بحلّ هيئة معادلات من الدرجة الثانية.

ب. ماذا تمثّل حلول هيئة المعادلات في الرسم البيانيّ؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

12. تحدٍّ: جد كلّ قيم m التي يقطع فيها المستقيم $y = mx$ القطع المكافئ $y = x^2 + 4$ في نقطة واحدة فقط، وجد نقطة التقاطع في كلّ حالة.

تلميح: متى يكون للمعادلة التربيعيّة حلّ واحد فقط؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الإجابات

السؤال 1

أ	2	الصورة $y = a(x-p)^2 + k$: $p = -3$، $k = 2$، و $a = -1 < 0$ إذن نقطة الرأس عظمى.
ب	3	القطع قائم ($a = 2 > 0$) ونقطة رأسه $(-1, 3)$ فوق المحور x، لذلك لا يقطع المحور x.
ج	2	الانعكاس بالنسبة إلى المحور x يغيّر إشارة y: $y = -[(x-1)^2 - 4] = -(x-1)^2 + 4$.

السؤال 2

أ	$(1, 9)$	نقطة رأس عظمى (القطع مقلوب).
ب	$(-2, 0)$, $(4, 0)$ $(0, 8)$	النقاط الصفريّة، ثمّ نقطة التقاطع مع المحور y.
ج	$x < 1$ $x > 1$	تصاعديّة عندما $x < 1$، وتنازليّة عندما $x > 1$.
د	$-2 < x < 4$ $x < -2$, $x > 4$	موجبة عندما $-2 < x < 4$، وسالبة عندما $x < -2$ أو $x > 4$.
هـ	$y = -(x-1)^2 + 9$	نقطة الرأس $(1, 9)$ و$a = -1$.
و	$y = (x-1)^2 - 9$ $(1, -9)$	نقطة رأس صغرى. المجال الموجب: $x < -2$ أو $x > 4$ (النقاط الصفريّة لا تتغيّر).

السؤال 3

أ		الدالّة أ: الرسم 2. الدالّة ب: الرسم 4. الدالّة ج: الرسم 1. الدالّة د: الرسم 3.
	$(2, -1)$	الدالّة أ: نقطة رأس صغرى.
	$(-1, 4)$	الدالّة ب: نقطة رأس عظمى.
	$(0, 2)$	الدالّة ج: نقطة رأس عظمى.
	$(-3, 0)$	الدالّة د: نقطة رأس صغرى.
ب		الدالّة د فقط: قطع قائم رأسه عند $x = -3$، فهو تصاعديّ لكلّ $x > -3$، وخاصّةً لكلّ $x > 0$. الدالّة أ تنازليّة عندما $0 < x < 2$.

السؤال 4

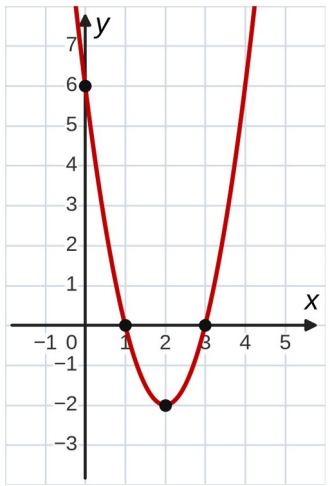
أ	$y = 2x^2 + 3$	نقطة الرأس $(0, 3)$.
ب	$y = 2(x-4)^2$	نقطة الرأس $(4, 0)$.
ج	$y = 2(x+5)^2 - 1$	نقطة الرأس $(-5, -1)$.
د	$y = a(x+2)^2 + 5$ $1 = a \cdot 4 + 5 \Rightarrow a = -1$	نعوّض النقطة $(0, 1)$. $a < 0$، إذن نقطة الرأس $(-2, 5)$ عظمى.
هـ	$k > 0$, $k = 0$, $k < 0$	القطع مقلوب ورأسه $(3, k)$: إذا كان الرأس فوق المحور x فهناك نقطتان صفريّتان، وإذا كان على المحور فنقطة واحدة، وإذا كان تحته فلا توجد نقاط صفريّة.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال 5

	$(1, 0)$, $(7, 0)$ $x = 4$ $(4, -9)$ $(0, 7)$ $x > 4$ $x < 4$ $x < 1$, $x > 7$ $1 < x < 7$	الدالّة الأولى (قطع قائم): الصفوف بالترتيب. الرأس صغرى؛ $x = (1 + 7) : 2 = 4$، و$y = (4 - 1) = -9$. $(4 - 7)$.
	$(-4, 0)$, $(2, 0)$ $x = -1$ $(-1, 18)$ $(0, 16)$ $x < -1$ $x > -1$ $-4 < x < 2$ $x < -4$, $x > 2$	الدالّة الثانية (قطع مقلوب): الصفوف بالترتيب. الرأس عظمى؛ $y = -2 \cdot 3 \cdot (-3) = 18$.

السؤال 6

أ	$x = \frac{8}{2 \cdot 2} = 2$ $y = 2 \cdot 4 - 16 + 6 = -2$	نقطة الرأس $(2, -2)$ صغرى، لأنّ $a = 2 > 0$.
ب	$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 1$	النقاط الصفريّة: $(1, 0)$ و$(3, 0)$.
ج	$(0, 6)$	
د		قطع قائم يمرّ بالنقاط التي وجدناها.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال 7

أ	$x=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{5\pm9}{2}$ $x_1=7,\ x_2=-2$	
ب	$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4}$ $x_1=0.5,\ x_2=-2$	
ج	$x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm5}{6}$ $x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{3}$	
د	$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$	حلّ واحد فقط، لأنّ ما تحت الجذر يساوي 0.
هـ	$b^2-4ac=4-20=-16$	لا يوجد حلّ، لأنّ ما تحت الجذر سالب.
و	$x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=1\pm\sqrt{5}$ $x_1\approx3.24,\ x_2\approx-1.24$	

السؤال 8

أ	$x=3,\ x=-2.5$	الضرب يساوي صفرًا: كلّ عامل يساوي صفرًا.
ب	$x+2=7\ ,\ x+2=-7$ $x=5,\ x=-9$	جذر تربيعيّ للطرفين.
ج	$3x(x-4)=0$ $x=0,\ x=4$	إخراج عامل مشترك.
د	$x^2=9$ $x=3,\ x=-3$	جذر تربيعيّ.
هـ	$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm7}{4}$ $x=2,\ x=-1.5$	قانون الجذور.
و	$x^2+2x-15=0$ $(x+5)(x-3)=0$ $x=3,\ x=-5$	ننقل كلّ الحدود إلى طرف واحد، ثمّ نحلّل (أو نستعمل قانون الجذور).

السؤال 9

أ	$x(x+3)=40$ $x^2+3x-40=0$ $(x+8)(x-5)=0$	$x=5$؛ الحلّ $x=-8$ مرفوض لأنّ الطول موجب. العرض 5 سم والطول 8 سم.
(1)	$-5t^2+20t+25=0$ $t^2-4t-5=0\ \Rightarrow\ t=5$	بعد 5 ثوانٍ؛ الحلّ $t=-1$ مرفوض.
(2)	$t=\frac{-20}{2\cdot(-5)}=2$ $h=-20+40+25=45$	أقصى ارتفاع 45 مترًا بعد ثانيتين.
(3)	$-5t^2+20t+25=40$ $t^2-4t+3=0\ \Rightarrow\ t=1,\ t=3$	بعد ثانية واحدة (في الصعود) وبعد 3 ثوانٍ (في النزول).

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال 10

أ	$x^2 - 2x - 3 = x + 1$ $x^2 - 3x - 4 = 0$ $(x - 4)(x + 1) = 0$	$x = 4 \Rightarrow y = 5$، و$x = -1 \Rightarrow y = 0$. نقطتا التقاطع هما $(4, 5)$ و$(-1, 0)$.
ب		النقطتان ظاهرتان في الرسم: المستقيم يقطع القطع عندهما.
ج	$x = \frac{2}{2} = 1\ ,\quad y = 1 - 2 - 3 = -4$ $k = -4$	المستقيم الأفقيّ يمسّ القطع في نقطة واحدة فقط عندما يمرّ برأسه $(1, -4)$.

السؤال 11

أ	$x^2 - 4 = -x^2 + 2x$ $2x^2 - 2x - 4 = 0$ $x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\ ,\ x = -1$	$x = 2 \Rightarrow y = 0$، و$x = -1 \Rightarrow y = -3$. نقطتا التقاطع هما $(2, 0)$ و$(-1, -3)$.
ب		كلّ حلّ لهيئة المعادلات هو نقطة تقاطع بين الرسمين البيانيّين.

السؤال 12

	$mx = x^2 + 4$ $x^2 - mx + 4 = 0$	يوجد حلّ واحد فقط عندما يكون ما تحت الجذر في قانون الجذور صفرًا.
	$b^2 - 4ac = m^2 - 16 = 0$ $m = 4\ ,\ m = -4$	
	$m = 4 :\ x^2 - 4x + 4 = 0 \ \Rightarrow\ x = 2$ $m = -4 :\ x^2 + 4x + 4 = 0 \ \Rightarrow\ x = -2$	نقطتا التماسّ: $(2, 8)$ عندما $m = 4$، و$(-2, 8)$ عندما $m = -4$.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي